المعادلات التفاضلية التي تحل في x:

إذا أمكن حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى:

$$F(x, y, y') = 0 \quad [1]$$

في x

$$x = \varphi(y, y')$$

نفرض هنا $p = y'$ وعندها تكتب المعادلة على شكل:

$$x = \varphi(y, p) \quad *$$

لنشتق هذه المعادلة بالنسبة إلى y ونعوض الوضع:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial \varphi(y,p)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dy} + \frac{\partial \varphi(y,p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

عندها تصبح المعادلة على شكل التالي

لنحل هذه المعادلة بالنسبة لـ $\frac{dp}{dy}$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial \varphi(y,p)}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi(y,p)}{\partial p}}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى في الدالة p والمتحول المستقل y ومن الدرجة الأولى.

بحل هذه المعادلة وبمكاملتها نحصل على الحل العام لها وهو:

$$\psi(y, p, c) = 0$$

$$\Rightarrow y = f(p, c) \quad **$$

فنجد أن $*$ و $**$ هي:

$$\begin{cases} x = \varphi(y, p) = \varphi(f(p,c), p) \\ y = f(p,c) \end{cases}$$

وهو الحل العام وسيطياً، والوسيط بين x, y هو p.

مثال:

$$y^2 y'^3 + 2x\cdot y' - y = 0$$

نحلها بالنسبة لـ x

$y' = p$.

$$2x = \frac{y - y^2 p^3}{p} \quad *$$

لنشتق بالنسبة لـ y ونعوض في العلاقة الأساسية:

$$2\frac{dx}{dy} = \frac{2}{p} = \frac{p - y\cdot\frac{dp}{dy}}{p^2} - 2yp^3 - 2y^2 p\frac{dp}{dy}$$

تجميع الحدود وتوحيد المقامات:

$$p(1 + 2yp^3) = -y(1 + 2yp^3)\frac{dp}{dy}$$

بفرض $1 + 2yp^3 \neq 0$ نقسم عليه فينتج:

$$p = -y\frac{dp}{dy} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$\ln\frac{y}{c} = \ln p^{-1} \Rightarrow y = \frac{c}{p} \quad **$$

نأخذ كل من * ، ** ويشكلان الحل العام وسيطياً

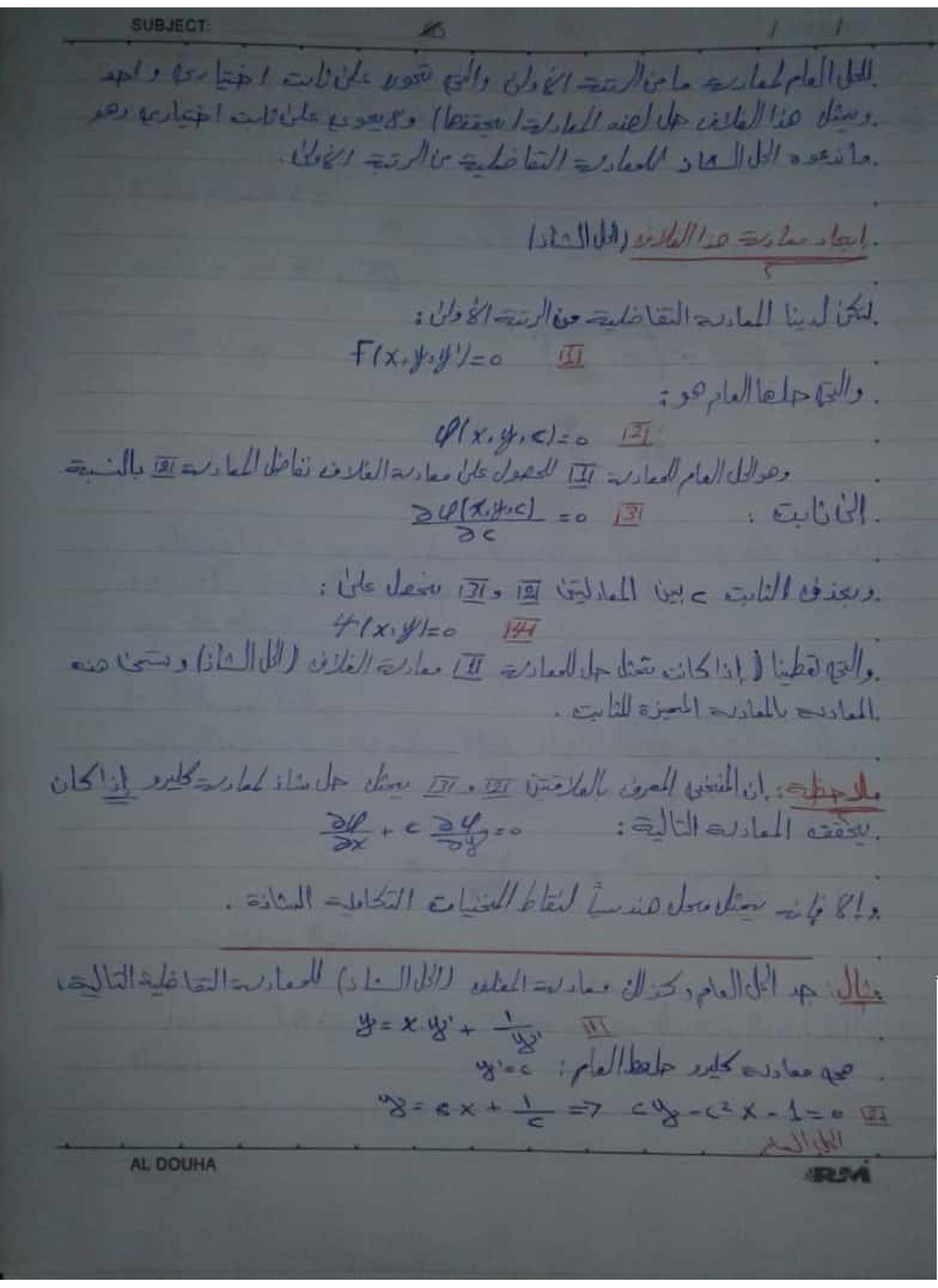
$$\begin{cases} y = \dfrac{c}{p} \\ x = \dfrac{c}{2p^2} - \dfrac{c^3}{2} \end{cases}$$

$y^2 - 2cx - c^3 = 0$ وهو الحل العام ديكارتياً

لنتعرف على طريقة أخرى لإيجاد الحل الشاذ:

الحل الشاذ (الغلاف):

تعريف: إذا وجدت أية مجموعة لا نهائية من المنحنيات وكانت جميعها تمس منحنٍ ثابت فإن هذا المنحني يسمى الغلاف لهذه المجموعة بحيث تكون هذه المجموعة ممثلة



الحل العام لمعادلة ما من الرتبة الأولى والتي تحتوي على ثابت اختياري واحد ويمثل هذا الغلاف حل لهذه المعادلة ايضاً ولا يحتوي على ثابت اختياري وهو ما ندعوه الحل الشاذ للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى.

إيجاد معادلة هذا الغلاف (الحل الشاذ)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى:

$$F(x,y,y')=0 \quad [1]$$

والتي حلها العام هو:

$$\varphi(x,y,c)=0 \quad [2]$$

وهو الحل العام للمعادلة [1] للحصول على معادلة الغلاف نفاضل المعادلة [2] بالنسبة الى الثابت:

$$\frac{\partial \varphi(x,y,c)}{\partial c}=0 \quad [3]$$

وبحذف الثابت c بين المعادلتين [2] و [3] نحصل على:

$$\psi(x,y)=0 \quad [4]$$

والتي تعطينا (إذا كانت تمثل حل للمعادلة [1]) معادلة الغلاف (الحل الشاذ) وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للثابت.

ملاحظة: إن المنحني المعرف بالعلاقتين [2] و [3] يمثل حل شاذ لمعادلة كليرو إذا كان يحقق المعادلة التالية:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+c\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$$

وإلا فإنه يمثل محل هندسي لنقاط المنحنيات التكاملية الشاذة.

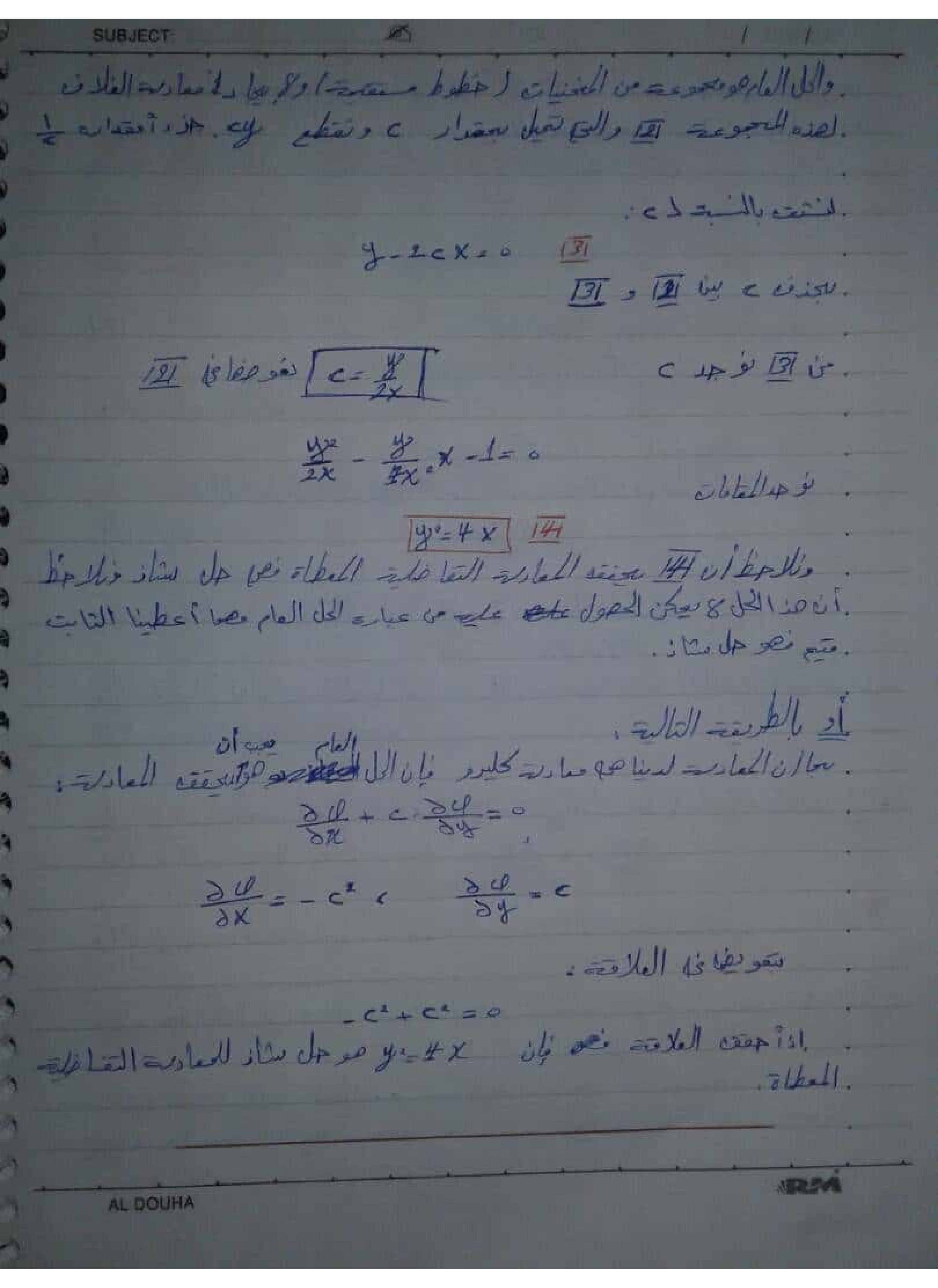
مثال: جد الحل العام، وكذلك معادلة الغلاف (الحل الشاذ) للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y = x\,y' + \frac{1}{y'} \quad [1]$$

هي معادلة كليرو حلها العام: $y'=c$

$$y = cx + \frac{1}{c} \Rightarrow cy - c^2x - 1 = 0 \quad [2]$$

الحل العام



والحل العام هو مجموعة من المنحنيات (خطوط مستقيمة) ولإيجاد معادلة الغلاف لهذه المجموعة [2] والتي تميل بمقدار c وتقطع oy جزء مقداره $\frac{1}{c}$

نشتق بالنسبة لـ c :

$$y - 2cx = 0 \quad [3]$$

نحذف c بين [2] و [3]

من [3] نوجد c : $c = \frac{y}{2x}$ نعوضها في [2]

$$\frac{y^2}{2x} - \frac{y^2}{4x^2} \cdot x - 1 = 0$$

نوجد المعادلة

$$y^2 = 4x \quad [4]$$

ونلاحظ أن [4] يحقق المعادلة التفاضلية المعطاة فهي حل شاذ ونلاحظ أن هذا الحل لا يمكن الحصول ~~[illegible]~~ عليه من عبارة الحل العام مهما أعطينا الثابت قيم فهو حل شاذ.

أو بالطريقة التالية :

بما أن المعادلة لدينا هي معادلة كليرو فإن الحل العام هو يجب أن يحقق المعادلة :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + c\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -c^2 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = c$$

بتعويضها في العلاقة :

$$-c^2 + c^2 = 0$$

إذا حققت العلاقة فهي فإن $y^2 = 4x$ هو حل شاذ للمعادلة التفاضلية المعطاة.